## Round Table und das Jahr der Mathematik

Die **Wahrscheinlichkeit** ist eine Einstufung von Aussagen und Urteilen nach dem Grad der Gewissheit (Sicherheit). Besondere Bedeutung hat dabei die Gewissheit von Vorhersagen. In der Mathematik hat sich mit der Wahrscheinlichkeitstheorie ein eigenes Fachgebiet entwickelt, das die Messung von Wahrscheinlichkeiten untersucht.

Stochastik als ein Teilgebiet der Mathematik ist die Lehre der Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Sie ist ein verhältnismäßig junger Teilbereich der Mathematik, zu dem im weiteren Sinne auch die Kombinatorik, die Wahrscheinlichkeitstheorie und die mathematische Statistik gehören.

Häufig wird der mathematische *Begriff von Wahrscheinlichkeit* benutzt: Die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Wahrscheinlichkeitstheorie (Teilgebiet der Stochastik) kümmert sich um die mathematische Systematisierung von Wahrscheinlichkeiten. Hier werden Wahrscheinlichkeitsverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion, bedingte Wahrscheinlichkeit und viele andere Begriffe unterschieden.

Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen zwischen 0 und 1, wobei Null und Eins zulässige Werte sind. Einem unmöglichen Ereignis wird die Wahrscheinlichkeit 0 zugewiesen, einem sicheren Ereignis die Wahrscheinlichkeit 1. Die Umkehrung davon gilt jedoch nur, wenn die Anzahl aller Ereignisse höchstens abzählbar unendlich ist. In „überabzählbar unendlichen“ Wahrscheinlichkeitsräumen kann ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 eintreten, es heißt dann *fast unmöglich*, ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 1 muss nicht eintreten, es heißt dann *fast sicher*.

Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der günstigen Ereignisse zur Gesamtmenge der Ereignisse (sogenannte ‚klassische‘ Definition, seit Christiaan Huygens und Jakob I. Bernoulli üblich, von Laplace formuliert)

**(Lotto 6 aus 49)**

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k=6 Kugeln von n=49 unterscheidbaren Kugeln zu ziehen, wenn die Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge keine Rolle spielt (Lotto 6 aus 49)?

Für die Zahl der Möglichkeiten, die alle gleich wahrscheinlich sind, gilt:

$N_{n,k} = (^n{}_k)$ [n über k] $= n! / (k!\cdot(n–k)!)$ (Kombinationen ohne Wiederholung)
$N_{49,6} = 49! / (6!\cdot 43!) = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot ... \cdot 44 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = 13.983.816$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten dieser Kombinationen und damit die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige im Lotto ist dann also:

$P_{n,k} = 1 / N_{n,k} = 1/13983816$

Die Wahrscheinlichkeit, zu den 6 richtigen Lottozahlen auch noch die Superzahl richtig zu haben, ist zehnmal so klein (wegen der zehn Möglichkeiten für die Superzahl: 0, 1, 2, ... , 9) und beträgt nur 1 : 139.838.160

**(4 Richtige bei Lotto 6 aus 49)**

Es werden k=6 Kugeln von n=49 unterscheidbaren Kugeln ausgewählt, wobei die Kugeln nicht zurückgelegt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den k=6 Kugeln m=4 "richtige Kugeln" von insgesamt r=6 „richtigen“ Kugeln befinden? Die Reihenfolge der Auswahl soll keine Rolle spielen.

Die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl von m=4 „richtigen“ Kugeln ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, 4 von 6 „richtigen“ Kugeln auszuwählen, multipliziert mit der Anzahl der Möglichkeiten, 2 von 43 „falschen“ Kugeln auszuwählen, geteilt durch die Anzahl der Möglichkeiten, irgendwelche 6 Kugeln auszuwählen. Für die Wahrscheinlichkeit gilt also:

P = (rm) · (n–rk–m) / (nk) (hypergeometrische Verteilung)
P = (64) · (432) / (496) = (6!/4!/2!) · (43!/2!/41!) / (49!/6!/43!)
= (6 · 5 / 1 / 2) · (43 · 42 / 1 / 2) · (49 · 48 · 47 · 46 · 45 · 44 / 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6)
= 645/665896 = 1/1032.3969 = 0.00096862 = 0.096862%

Das **Geburtstagsparadoxon** ist ein Beispiel dafür, dass bestimmte Wahrscheinlichkeiten (und auch Zufälle) intuitiv häufig falsch abgeschätzt werden.

Das Ergebnis der Frage

> *Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 23 anwesenden Personen (also z.B. bei zwei Fußballmannschaften und einem Schiedsrichter) zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben (ohne Beachtung des Jahrganges)?*

ist für die meisten verblüffend und wird deshalb als paradox wahrgenommen. So schätzen die meisten Menschen die Wahrscheinlichkeit um eine Zehnerpotenz falsch ein. Sie liegt nicht zwischen 1 und 5 % (wie zumeist geschätzt), sondern über 50 %; bei 50 Personen sogar bei über 97 %.

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist für $n$ Personen $m = 365^n$, wobei alle Fälle gleich wahrscheinlich sind. Zum Beispiel ergeben sich für zwei Personen $365^2 = 133225$ mögliche Fälle von Geburtstagskombinationen.

Von diesen möglichen Fällen beinhalten

$$u = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}$$

nur unterschiedliche Geburtstage. Für die erste Person kann der Geburtstag frei gewählt werden, für die zweite gibt es dann 364 Tage, an denen die erste nicht Geburtstag hat etc.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{u}{m} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

dass alle $n$ Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben.

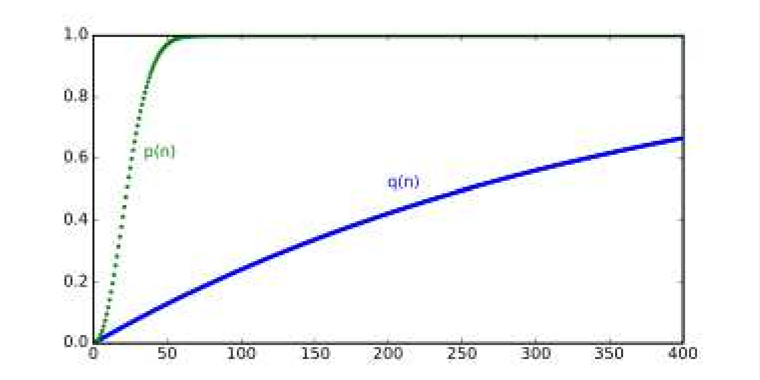
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen doppelten Geburtstag ist somit

$$P = 1 - \frac{u}{m} = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Mit der Stirling-Formel lässt sich dies gut nähern zu

$$P \approx 1 - \left(\frac{365}{365-n}\right)^{365.5-n} \cdot e^{-n}$$

Berechnet man etwa für $n$=10, 11, …, bis 23 mit einem Taschenrechner $P$ nach der oben angegebenen Formel, kommt man zu dem Ergebnis, dass für eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % nur 23 Personen benötigt werden. In Gruppen größer als 57 Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit schon über 99 %.




$p(n)$ = Wahrscheinlichkeit für mindestens einen doppelten Geburtstag
$q(n)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Geburtstag mit *deinem* zusammenfällt

Im Kartenspiel Poker beschreibt der Begriff Hand die besten fünf Karten, die ein Spieler nutzen kann. Die Rangfolge der einzelnen Kartenkombinationen ist bei allen Spielvarianten gleich, lediglich ihre Wahrscheinlichkeit variiert. So ist bei der Spielvariante Texas Hold'em sogar das Paar wahrscheinlicher als High Card, rangiert aber dennoch höher. Die bestmögliche erreichbare Hand ist bei einem solchen Deck ein Fünfling, während die beste Hand bei einem normalen französischen Blatt der Royal Flush ist.

- Falls eine Gleichheit bei der Kombination herrscht, entscheidet für gewöhnlich die Höhe der einzelnen Karten. Dabei gilt folgende, absteigende Reihenfolge: Ass – König – Dame – Bube – 10 – 9 – 8 – 7 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2. Ist solch eine Karte entscheidend, so hat der betroffene Spieler den besseren Kicker.
- Farben haben keinen Einfluss auf die Stärke der Hand, es sei denn der Spieler verfügt über fünf Karten derselben Farbe, siehe Flush.
- Eine Hand besteht immer aus fünf Karten. Deshalb ist es auch nicht möglich, dass der Kicker bei zwei gleich hohen Straights entscheidet, da diese ja bereits aus fünf Karten bestehen.
- Karten werden zuerst nach der Höhe ihrer Kombination gewertet und erst danach nach der Höhe innerhalb der Kombination: Zwei Paare aus Zweien und Dreien sind also besser als Ein Paar Asse.

**Anzahl möglicher Kombinationen**

Insgesamt sind

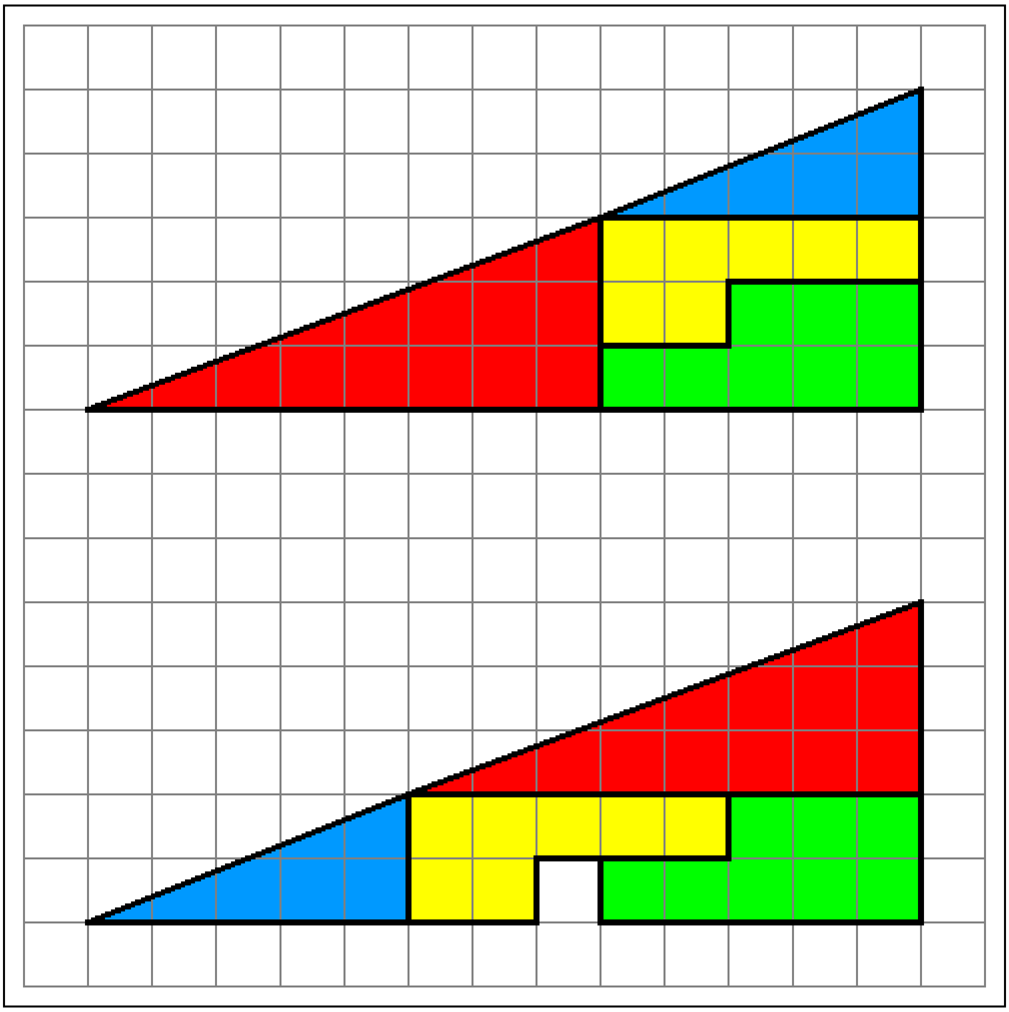
$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2.598.960$$

verschiedene Hände möglich.

## Kombinationsmöglichkeiten bei 5 aus 52 Karten

| Hand | Möglichkeiten | Wahrscheinlichkeit | kumuliert | Verhältnis |
|---|---|---|---|---|
| Straight Flush | 36+4 | 0,00154% | 0,00154% | 64.973 : 1 |
| Vierling | 624 | 0,0240% | 0,0256% | 4.164 : 1 |
| Full House | 3.744 | 0,144% | 0,170% | 693 : 1 |
| Flush | 5.108 | 0,197% | 0,367% | 508 : 1 |
| Straight | 10.200 | 0,392% | 0,76% | 254 : 1 |
| Drilling | 54.912 | 2,11% | 2,87% | 46,3 : 1 |
| Zwei Paare | 123.552 | 4,75% | 7,62% | 20,0 : 1 |
| Paar | 1.098.240 | 42,3% | 49,9% | 1,37 : 1 |
| Höchste Karte | 1.302.540 | 50,1% | 100% | 1 : 1 |
| **Total** | 2.598.960 | 100% | 100% | 1 : 1 |

**Werden in der abgebildeten Figur die vier Puzzleteile anders angeordnet, entsteht plötzlich eine Lücke. Ist die Gesamtfläche etwa kleiner geworden?**



Dieser Eindruck beruht auf einer optischen Täuschung, weil entgegen dem Anschein weder die obere Figur ein Dreieck noch die untere Figur ein Dreieck mit Lücke ist. Die obere "Seite" knickt bei der ersten Figur im mittleren Bereich nach oben und bei der zweiten Figur nach unten. Man kann leicht nachrechnen, dass die Steigungen der beiden betroffenen Puzzle-Stücke nicht gleich sind. Das linke Puzzle-Dreieck bei der oberen Figur ist 8 Kästchen breit und rechts 3 Kästchen hoch. Die Steigung dieses Dreiecks ist demnach 3/8 = 0.375. Das rechte Puzzle-Dreieck ist 5 Kästchen breit und rechts 2 Kästchen hoch. Hier beträgt die Steigung also 2/5 = 0.400 und ist somit größer. Bei der unteren Figur sind die Verhältnisse genau umgekehrt und das Dreieck mit der größeren Steigung liegt links. Dadurch wird hier mehr Fläche verbraucht, die an anderer Stelle durch eine entsprechende Lücke wegen der Flächenerhaltung wieder eingespart werden muss.

Was ist verblüffend an diesem Mathematik-Rätsel? Intuitiv halten wir die beiden Figuren für ein Dreieck bzw. für ein gleich großes Dreieck mit Lücke, obwohl uns der Verstand sagt, dass die beiden Flächen gleich sein müssen.


Quellen :
http://de.wikipedia.org/wiki/Geburtstagsparadoxon
http://www.brefeld.homepage.t-online.de/stochastik-formeln.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Hand_(Poker)
http://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeit